**УДК 519.857:658.152**

# РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО ІНВЕСТУВАННЯ МЕТОДОМ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

**В. В. Маринюк**
студент 4 курсу, група АТ-21інт, навчально-науковий механічний інститут
Науковий керівник – к.т.н., доцент О. Ю. Тимейчук

*Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, Україна*

**Наведено загальну постановку задачі динамічного програмування та сформульовано принцип оптимальності Беллмана. Розглянуто алгоритм та розв'язок задачі оптимального вкладення обмежених інвестицій в авторемонтні підприємства для отримання максимального загального прибутку від приросту випуску продукції. Запропоновані галузі, де можна розв'язувати задачі методами динамічного програмування.**
**Ключові слова:** статичні та динамічні економічні процеси, принцип оптимальності Беллмана, попередня та остаточна оптимізація.

**Приведена общая постановка задачи динамического программирования и сформулирован принцип оптимальности Беллмана. Рассмотрен алгоритм и решение задачи оптимального вложения ограниченных инвестиций в авторемонтные предприятия для получения максимальной общей прибыли от прироста выпуска продукции. Предложены области, где можно решать задачи методами динамического программирования.**
**Ключевые слова:** статические и динамические экономические процессы, принцип оптимальности Беллмана, предыдущая и окончательная оптимизация.

**The general statement of the problem of dynamic programming and the Bellman principle of optimality are formulated. The algorithm and the solution of the problem of optimal investment of limited investments in automobile repair enterprises are considered for obtaining the maximum total profit from the increase in output. Proposed areas where it is possible to solve problems by methods of dynamic programming.**
**Keywords:** static and dynamic economic processes, Bellman's principle of optimality, previous and final optimization.

**Математичними моделями** двох типів можна описати економічні процеси:

1) статичні − оптимальний розв'язок знаходиться тільки на один етап планування;
2) динамічні – оптимальні розв'язки знаходяться на кожному окремому етапі, що забезпечує оптимальний розв'язок в цілому.

Основними особливостями розв'язання економічних задач з використанням методів динамічного програмування (ДП) є такі:

1) не існує загальної постановки задач;
2) не існує єдиного алгоритму розв'язку;
3) основою кожної динамічної моделі є функціональне рівняння;
4) для кожної задачі функціональні рівняння виводяться індивідуально;
5) всі функціональні рівняння базуються на принципі оптимальності Беллмана.

**Загальна постановка задачі ДП:** нехай деяка керована система знаходиться в початковому стані S (керована – означає, що можна керувати процесом, який відбувається в системі, а спосіб впливу на неї – управління U). Завдяки здійсненню певного управління U вказана система переходить з початкового стану в кінцевий. З процесом зміни стану системи пов'язаний деякий числовий критерій W (функція). Мета керуючої сторони полягає в пошуку такого можливого управління U, яке надало б максимального значення функції W=W(U).

У загальному вигляді ці задачі можуть бути описані так: нехай є деяка кількість ресурсів, які потрібно розподілити між об'єктами на окремих часових проміжках так, щоб отримати максимальну сумарну ефективність від вибраного способу розподілу. Показником ефективності розподілу може бути прибуток, собівартість, фондовіддача тощо.

**Принцип оптимальності Беллмана** визначає основу методу динамічного програмування і формулюється так: який не був би стан системи перед наступним кроком, керування на даному кроці потрібно вибирати так, щоб виграш на даному кроці в сумі з оптимальними виграшами на всіх наступних кроках був максимальним. Основна умова того, щоб цей принцип здійснювався, така: процес управління повинен бути без зворотного зв'язку, тобто керування на даному кроці не повинно впливати на попередні кроки.

Основне функціональне рівняння Беллмана можна записати у такому вигляді:

$$F_{n-k}(X^k) = \max_{u_{k+1}} \left[W_{k+1}(X^{(k)}, u_{k+1}) + F_{n-k}(X_n{}^{(k+1)})\right], \qquad k = \overline{0, n-1} \quad , \tag{1}$$

де $X^{(k)} = (x_1{}^{(k)}, x_2{}^{(k)}, ..., x_n{}^{(k)})$ є сукупністю чисел, що визначають стан системи *S* на *k*-му кроці і отримані в результаті керування $U_k$, яке забезпечує перехід системи *S* із стану $X^{(k-1)}$ в $X^{(k)}$; $U = (u_1, u_2, ... u_n) -$ оптимальна стратегія керування; $F_{n-k}(X_n{}^{(k)})$ – це прибуток, який отримується при переході будь-якого стану $X^{(k)}$ в кінцевий стан $X^{(n)}$ при реалізації оптимальної стратегії керування на решті *(n-k)* кроках.

Процедура побудови оптимального управління методом динамічного програмування розпадається на дві стадії: ***попередню*** та ***остаточну***. Як відомо, в кожному процесі є останній крок, на якому прийняті рішення не залежать від майбутнього. Тому на цьому кроці вибирають керування, яке дозволяє отримати найбільший ефект. Спланувавши цей крок, до нього приєднуємо попередній, до якого приєднуємо попередній і т. д. до початкового стану. Щоб спланувати останній крок, потрібно знати стан системи на попередньому кроці. Якщо ж він невідомий, то роблять різноманітні припущення, про можливі стани системи на цьому кроці. Для кожного припущення вибирають оптимальні керування на попередньому кроці. Таке оптимальне керування називається ***умовно оптимальним***. Тобто ***попередня оптимізація*** проводиться за кроками у зворотному порядку (від кінця до початку), а ***остаточна оптимізація*** по кроках від початку до кінця.

Розглянемо задачу оптимального вкладення обмежених інвестицій в авторемонтні підприємства для отримання максимального загального прибутку від приросту випуску продукції.

**Алгоритм розв'язування задачі оптимального вкладення інвестицій:**

1. Визначаємо максимальний приріст випуску продукції та умовно-оптимальні обсяги інвестицій в перше підприємство при умові, що всі кошти будемо вкладати в перше підприємство і записуємо в таблицю.
2. Визначаємо максимальний приріст випуску продукції та умовно-оптимальні обсяги інвестицій в друге підприємство при умові, що всі кошти будемо вкладати в перше і друге підприємства разом.
3. Аналогічно продовжуємо заповнення таблиці до *n*-го підприємства.
4. Оптимальний розв'язок задачі отримуємо, переглядаючи таблицю ззаду наперед.
5. Робимо висновок.

**Задача.** Нехай для чотирьох авторемонтних підприємств виділено інвестиції в обсязі S=500 тис. грн, які необхідно вкласти так, щоб отримати максимальний загальний прибуток від приросту випуску продукції. Залежності між вкладеними інвестиціями в кожне підприємство та приростом випуску продукції наведені в табл. 1.

Таблиця 1

| Обсяг інвестицій, тис. грн | Приріст випуску продукції від вкладених інвестицій, тис. грн | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 підприємство | 2 підприємство | 3 підприємство | 4 підприємство |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 100 | 30 | 20 | 30 | 25 |
| 200 | 60 | 80 | 60 | 70 |
| 300 | 50 | 100 | 80 | 90 |
| 400 | 90 | 70 | 90 | 60 |
| 500 | 70 | 90 | 110 | 80 |

**Розв'язання.** Прямим ходом, зліва направо, заповнимо табл. 2.

Таблиця 2

| Обсяг інвестицій | Приріст випуску продукції від інвестицій в 1 підпр. | Максимальний приріст випуску продукції (1 підприємство) | Умовно-оптим. обсяг інвестицій в 1 підпр. | Приріст випуску продукції від інвестицій в 2 підпр. | Максимальний приріст випуску продукції (1 і 2 підприємства) | Умовно-оптим. обсяг інвестицій в 2 підпр. | Приріст випуску продукції від інвестицій в 3 підпр. | Максимальний приріст випуску продукції (1, 2 і 3 підпр.) | Умовно-оптим. обсяг інвестицій в 3 підпр. | Приріст випуску продукції від інвестицій в 4 підпр. | Максимальний приріст випуску продукції (1, 2, 3 і 4 підпр.) | Умовно-оптим. обсяг інвестицій в 4 підпр. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| →100 | 30 | 30 | 100 | 20 | 30 | 0 | 30 | 30 | 0 | 25 | | |
| 200 | 60 | 60 | 200 | 80 | 80 | 200 | 60 | 80 | 0 | 70 | | |
| →300 | 50 | 60 | 200 | 100 | 110 | 200 | 80 | 110 | 0 | 90 | | |
| 400 | 90 | 90 | 400 | 70 | 140 | 200 | 90 | 140 | 0 | 60 | | |
| →500 | 70 | 90 | 400 | 90 | 160 | 300 | 110 | 170 | 100 | 80 | 180 | 200 |

Зворотним ходом отримаємо оптимальний розв'язок:

1) в останньому рядку (при обсягах інвестицій 500 тис. грн) із стовпчиків 3, 6, 9 і 12 вибираємо найбільше значення (180 тис. грн при 200 тис. грн інвестицій в 4 підприємство);

2) при залишку інвестицій 300 тис. грн (500-200=300) в стовпчиках 3, 6 і 9 вибираємо найбільше значення (110 тис. грн при 0 тис. грн інвестицій в 3 підприємство та 200 тис. грн інвестицій в 2 підприємство);

3) при залишку інвестицій 100 тис. грн (300-200=100) в стовпчику 3 вибираємо 30 тис. грн при 100 тис. грн інвестицій в 1 підприємство.

Отже, максимальний загальний приріст буде 180 тис. грн, якщо вкласти інвестиції в обсязі 500 тис. грн в чотири підприємства наступним чином: в 1– 100 тис. грн, в 2 – 200 тис. грн, в 3 – 0 тис. грн, в 4 – 200 тис. грн.

**Методами динамічного програмування** можна розв'язати економічні задачі заміни обладнання, розподілу інвестицій та керування запасами, де одним з факторів є час, але для кожної з них потрібно скласти окремий алгоритм розв'язку.

**Список використаних джерел:**

**1.** Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Прутко, И. М. Тришин и др.; под. ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2000. – 407 с. **2.** Математическое программирование : учеб. пособие / Ю. Н. Кузнєцов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – М. : Высш. школа, 1980. – 300 с. **3.** Тимейчук О. Ю. Математичні методи і моделі в розрахунках на ЕОМ: Навчальний посібник / О. Ю. Тимейчук. – Рівне : НУВГП, 2009. – 57 с. **4.** Экономико-математические методы и прикладные модели : учеб. пособие для вузов / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайитбегов и др.; под. ред. В. В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 391 с.